第 33 卷 第 5 期
2014 年 10 月

武夷学院学报
JOURNAL OF WUYI UNIVERSITY

Vol.33 No.5
OCT.2014

q-Durrmeyer-Stancu 算子的统计逼近性质

任美英

(武夷学院 数学与计算机学院,福建 武夷山 354300)

摘 要:本文引进一类 q-Durrmeyer-Stancu 算子,并研究该算子列的一些统计逼近性质。得到算子列的统计逼近定理,同时借助连续模和 Lipschitz 函数类给出算子列统计收敛速度的估计。

关键词:统计逼近;q-Durrmeyer-Stancu 算子;收敛速度;连续模;q-积分

中图分类号:O174.41 **文献标识码:**A **文章编号:**1674-2109(2014)05-0001-05

自 1997 年 Phillips[1]提出并研究 q-Bernstein 算子以来,q-微积分在逼近论中的应用成为了一个研究热点,很多逼近论方向的专家学者致力于该领域的研究,获得了许多很好的结果,如文献[2-5]。2008 年,Gupta[6]研究了 q-Durrmeyer 算子的逼近性质。本文的目的是引进一类 q-Durrmeyer-Stancu 算子,并结合统计收敛概念,研究该算子的统计逼近性质。

首先,我们引入 q-整数和 q-微积分的若干概念,这里所述的概念在文献[7-8]中可以找到。对任意固定的实数 q>0 和非负整数 k,q-整数$[k]_q$和 q-阶乘$[k]_q!$分别定义为:

$$[k]_q:=\begin{cases}(1-q^k)/(1-q), & q\neq 1\\ k, & q=1\end{cases}$$

和

$$[k]_q!\ :=\begin{cases}[k]_q[k-1]_q\cdots[1]_q, & k\geq 1\\ 1, & k=0\end{cases}$$

让 q>0, 对非负整数 n,k,n≥k,q-二项式系数定义为:

$$\begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix}_q:=\frac{[n]_q!}{[k]_q!\ [n-k]_q!}$$

让 q>0,对非负整数 n,$(x-a)^n$ 的 q-模拟$(x-a)_q^n$定义为

$$(x-a)_q^n=\begin{cases}1, & n=0,\\ (x-a)(x-qa)\cdots(x-q^{n-1}a), & n\geq 1.\end{cases}$$

区间[0,a]上 q-Jackson 积分定义为:

$$\int_0^a f(t)d_qt=(1-q)a\sum_{j=0}^{\infty}f(q^ja)q^j,0<q<1,$$

假设级数绝对收敛.

Beta 函数的 q-模拟定义为:

$$B_q(m,n)=\int_0^1 t^{m-1}(1-qt)_q^{n-1}d_qt,m,n>0.$$

易知

$$B_q(m,n)=\frac{[m-1]_q!\ [n-1]_q!}{[m+n-1]_q!}.$$

设 α,β 是给定的两个实参数, 满足 $0\leq\alpha\leq\beta$.对 $f\in C[0,1],q\in(0,1),x\in[0,1],n\in N$, 定义 q-Durrmeyer-Stancu 算子为:

$$D_{n,q}^{(\alpha,\beta)}(f;x)$$
$$=[n+1]_q\sum_{k=0}^{n}q^{-k}p_{n,k}(q;x)\int_0^1 p_{n,k}(q;qt)f(\frac{[n]_qt+a}{[n]_q+\beta})d_qt,$$

收稿日期:2014-01-16

基金项目:福建省自然科学基金资助项目(项目编号:2013J01017,2014J01021);福建省教育厅 A 类科技项目(项目编号:JA12324)。

作者简介:任美英(1965-),女,汉族,教授,主要研究方向:函数逼近论。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

(1)

其中

$$p_{n,k}(q;x)=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k(1-x)_q^{n-k}. \qquad (2)$$

注 当 $\alpha=\beta=0$ 时，算子 $D_{n,q}^{(\alpha,\beta)}(f;x)$ 退化为 Gupta[6] 引进的 q-Durrmeyer 算子 $D_{n,q}(f;x)$.

1 几个引理

下面给出本文需要的几个引理。

引理 1.1[6] 对 q-Durrmeyer 算子 $D_{n,q}(f;x)$，让 $e_m(t)=t^m$，$m=0,1,2$.则

(ⅰ) $D_{n,q}(e_0;x)=1$;

(ⅱ) $D_{n,q}(e_1;x)=\dfrac{1+q[n]_q x}{[n+2]_q}$;

(ⅲ) $D_{n,q}(e_2;x)$

$$=\frac{q^3[n]_q([n]_q-1)x^2+q(1+q)^2[n]_q x+1+q}{[n+2]_q[n+3]_q}.$$

由 q-Durrmeyer-Stancu 算子和 q-Durrmeyer 算子的定义，易得如下引理.

引理 1.2 对任意的 $m\in N\cup\{0\}$，让 $e_m(t)=t^m$，则

$$D_{n,q}^{(\alpha,\beta)}(e_m;x)=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{[n]_q^j\alpha^{m-j}}{([n]_q+\beta)^m}D_{n,q}(e_j;x).$$

由引理 1.1 和引理 1.2，经过简单计算，可以得到如下结论.

引理 1.3 对 q-Durrmeyer-Stancu 算子 $D_{n,q}^{(\alpha,\beta)}(f;x)$，让 $e_m(t)=t^m$，$m=0,1,2$.则

(ⅰ) $D_{n,q}^{(\alpha,\beta)}(e_0;x)=1$; (3)

(ⅱ) $D_{n,q}^{(\alpha,\beta)}(e_1;x)=\dfrac{[n]_q}{[n]_q+\beta}\left(\dfrac{1+q[n]_q x}{[n+2]_q}\right)+\dfrac{\alpha}{[n]_q+\beta}$; (4)

(ⅲ) $D_{n,q}^{(\alpha,\beta)}(e_2;x)$

$$=\frac{[n]_q^2}{([n]_q+\beta)^2}\left(\frac{q^3[n]_q([n]_q-1)x^2+q(1+q)^2[n]_q x+1+q}{[n+2]_q[n+3]_q}\right)$$
$$+\frac{2\alpha[n]_q}{([n]_q+\beta)^2}\left(\frac{1+q[n]_q x}{[n+2]_q}\right)+\frac{\alpha^2}{([n]_q+\beta)^2}. \qquad (5)$$

引理 1.4 对 q-Durrmeyer-Stancu 算子 $D_{n,q}^{(\alpha,\beta)}(f;x)$，有

$$D_{n,q}^{(\alpha,\beta)}((t-x)^2;x)\le\frac{12\beta^2+22\beta+\alpha^2+6\alpha+11}{[n]_q+\beta}\left(1+\frac{1}{[n]_q+\beta}\right).$$

证 因为 $D_{n,q}^{(\alpha,\beta)}((t-x)^2;x)=D_{n,q}^{(\alpha,\beta)}(t^2;x)-2xD_{n,q}^{(\alpha,\beta)}(t;x)+D_{n,q}^{(\alpha,\beta)}(x^2;x)$，因此由引理 1.3 可得

$$D_{n,q}^{(\alpha,\beta)}((t-x)^2;x):=(A_{n,q}^{(\alpha,\beta)}+B_{n,q}^{(\alpha,\beta)})x^2+B_{n,q}^{(\alpha,\beta)}x(1-x)+C_{n,q}^{(\alpha,\beta)},$$

其中

$$A_{n,q}^{(\alpha,\beta)}=\frac{q^3[n]_q^3([n]_q-1)-2q[n]_q^2([n]_q+\beta)[n+3]_q+([n]_q+\beta)^2[n+2]_q[n+3]_q}{([n]_q+\beta)^2[n+2]_q[n+3]_q},$$

$$B_{n,q}^{(\alpha,\beta)}=\frac{q(1+q)^2[n]_q^3+2\alpha q[n]_q^2[n+3]_q-2([n]_q+\beta)[n+3]_q([n]_q+\alpha[n+2]_q)}{([n]_q+\beta)^2[n+2]_q[n+3]_q},$$

$$C_{n,q}^{(\alpha,\beta)}=\frac{(1+q)[n]_q^2+2\alpha[n]_q[n+3]_q+\alpha^2[n+2]_q[n+3]_q}{([n]_q+\beta)^2[n+2]_q[n+3]_q}.$$

易知 $B_{n,q}^{(\alpha,\beta)}\le\dfrac{4+2\alpha}{[n]_q+\beta}$，$C_{n,q}^{(\alpha,\beta)}\le\dfrac{2+2\alpha+\alpha^2}{([n]_q+\beta)^2}$.基于 $[n]_q=\dfrac{1-q^n}{1-q}$，经过简单计算可得 $A_{n,q}^{(\alpha,\beta)}+B_{n,q}^{(\alpha,\beta)}\le\dfrac{12\beta^2+22\beta+4\alpha+9}{([n]_q+\beta)^2}$.因此，由 $\max\limits_{x\in[0,1]}x(1-x)=\dfrac{1}{4}$，$0\le\alpha\le\beta$ 可得

$$D_{n,q}^{(\alpha,\beta)}((t-x)^2;x)\le\frac{1+\alpha}{[n]_q+\beta}+\frac{12\beta^2+22\beta+\alpha^2+6\alpha+11}{([n]_q+\beta)^2}$$
$$\le\frac{12\beta^2+22\beta+\alpha^2+6\alpha+11}{[n]_q+\beta}\left(1+\frac{1}{[n]_q+\beta}\right).$$

2 统计逼近

设 K 是自然数集 N 的一个子集，χ_K 为 K 的特征函数，K 的密度定义为 $\delta(K):=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\chi_K(k)$，如果极限存在(见[9])，称序列 $x=\{x_n\}$ 统计收敛到数 L，并记作 $st-\lim\limits_{n}x_n=L$，如果对于任意的 $\varepsilon>0$，$\delta\{n\in N:|x_n-L|\ge\varepsilon\}=0$[10].

注 2.1 任何收敛数列是统计收敛的，但反之不然[11].

设 B[a,b]表示定义在区间[a,b]上的所有有界函数的集合，C[a,b]表示定义在区间[a,b]上的所有连续函数的集合.2002 年，Gadjiev 和 Orhan[12]将统计收敛概念应用到逼近理论中，得到了如下关于统计收敛的 Bohman-Korovkin 型逼近定理.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

定理 2.1[12] 设$\{A_n\}_{n\in N}$是从 C[a,b]到 B[a,b]的正线性算子列,$st\text{-}\lim_n \|A_n(e_v;.)-e_v\|_{C[a,b]}=0$,其中$e_v(t)=t^v$,$v=0,1,2$.则对任意的$f\in C[a,b]$,有

$$st\text{-}\lim_n \|A_n(f;.)-f\|_{C[a,b]}=0.$$

设序列$q=\{q_n\}$,$0<q_n<1$满足条件:

$$st\text{-}\lim_n q_n=1,\ st\text{-}\lim_n q_n^n=a(a<1) \tag{6}$$

下面给出 q-Durrmeyer-Stancu 算子的统计逼近定理.

定理 2.2 让序列$q=\{q_n\}$,$0<q_n<1$满足条件(6),则对任意$f\in C[0,1]$,有

$$st\text{-}\lim_n \|D_{n,q_n}^{(\alpha,\beta)}(f;.)-f\|_{C[0,1]}=0.$$

证 由 q-Durrmeyer-Stancu 算子和 q-Jackson 积分的定义知,对任意$f\in C[0,1]$,$\{D_{n,q_n}^{(\alpha,\beta)}(f;x)\}$是从 C[0,1]到 C[0,1]的正线性算子列。对$e_v(t)=t^v$,$v=0,1,2$,由(3)式,显然有

$$st\text{-}\lim_n \|D_{n,q_n}^{(\alpha,\beta)}(e_0;.)-e_0\|_{C[0,1]}=0. \tag{7}$$

由(4)式,我们有

$$D_{n,q_n}^{(\alpha,\beta)}(e_1;x)-e_1(x)$$

$$=\left(\frac{q_n[n]_{q_n}^2}{([n]_{q_n}+\beta)[n+2]_{q_n}}-1\right)x+\frac{[n]_{q_n}+\alpha[n+2]_{q_n}}{([n]_{q_n}+\beta)[n+2]_{q_n}}$$

基于$[n+2]_{q_n}=[n]_{q_n}+q_n^n[2]_{q_n}$,对$x\in[0,1]$,有

$$\|D_{n,q_n}^{(\alpha,\beta)}(e_1;.)-e_1\|_{C[0,1]}\le(1-q_n)+\frac{\alpha+3\beta+3}{[n]_{q_n}+\beta}.$$

对任意给定的正数ε,令

$U=\{k:\|D_{k,q_k}^{(\alpha,\beta)}(e_1;.)-e_1\|_{C[0,1]}\ge\varepsilon\}$,$U_1=\{k:1-q_k\ge\frac{\varepsilon}{2}\}$,

$U_2=\{k:\frac{\alpha+3\beta+3}{[k]_{q_k}+\beta}\ge\frac{\varepsilon}{2}\}$.显然有$U\subseteq U_1\cup U_2$,因此

$$\delta\{k\le n:\|D_{k,q_k}^{(\alpha,\beta)}(e_1;.)-e_1\|_{C[0,1]}\ge\varepsilon\}$$

$$\le\delta\{k\le n:1-q_k\ge\frac{\varepsilon}{2}\}+\delta\{k\le n:\frac{\alpha+3\beta+3}{[k]_{q_k}+\beta}\ge\frac{\varepsilon}{2}\}. \tag{8}$$

由(6)式易知

$st\text{-}\lim_n(1-q_n)=0$,$st\text{-}\lim_n\frac{\alpha+3\beta+3}{[n]_{q_n}+\beta}=0$,因此由(8)式可得

$$st\text{-}\lim_n \|D_{n,q_n}^{(\alpha,\beta)}(e_1;.)-e_1\|_{C[0,1]}=0. \tag{9}$$

由(5)式,我们有

$$D_{n,q_n}^{(\alpha,\beta)}(e_2;x)-e_2(x)$$

$$=\left(\frac{q_n^3[n]_{q_n}^3([n]_{q_n}-1)}{([n]_{q_n}+\beta)^2[n+2]_{q_n}[n+3]_{q_n}}-1\right)x^2$$

$$+\frac{[n]_{q_n}^2}{([n]_{q_n}+\beta)^2}\left(\frac{q_n(1+q_n)^2[n]_{q_n}x+1+q_n}{[n+2]_{q_n}[n+3]_{q_n}}\right)$$

$$+\frac{2\alpha[n]_{q_n}}{([n]_{q_n}+\beta)^2}\left(\frac{1+q_n[n]_{q_n}x}{[n+2]_{q_n}}\right)+\frac{\alpha^2}{([n]_{q_n}+\beta)^2}.$$

基于$[n+2]_{q_n}=[n]_{q_n}+q_n^n[2]_{q_n}$,$[n+3]_{q_n}=[n]_{q_n}+q_n^n[3]_{q_n}$,对$x\in[0,1]$,经简单计算可得

$$\|D_{n,q_n}^{(\alpha,\beta)}(e_2;.)-e_2\|_{C[0,1]}$$

$$\le(1-q_n^3)+\frac{18+24\beta+12\beta^2+4\alpha+\alpha^2}{[n]_{q_n}+\beta}.$$

对任意给定的正数ε,令

$V=\{k:\|D_{k,q_k}^{(\alpha,\beta)}(e_2;.)-e_2\|_{C[0,1]}\ge\varepsilon\}$,$V_1=\{k:1-q_k^3\ge\frac{\varepsilon}{2}\}$,

$V_2=\{k:\frac{18+24\beta+12\beta^2+4\alpha+\alpha^2}{[k]_{q_k}+\beta}\ge\frac{\varepsilon}{2}\}$.显然有$V\subseteq V_1\cup V_2$,因此

$$\delta\{k\le n:\|D_{k,q_k}^{(\alpha,\beta)}(e_2;.)-e_2\|_{C[0,1]}\ge\varepsilon\}$$

$$\le\delta\{k\le n:1-q_k^3\ge\frac{\varepsilon}{2}\}$$

$$+\delta\{k\le n:\frac{18+24\beta+12\beta^2+4\alpha+\alpha^2}{[k]_{q_k}+\beta}\ge\frac{\varepsilon}{2}\}. \tag{10}$$

由(6)式易知$st\text{-}\lim_n(1-q_n^3)=0$,

$st\text{-}\lim_n\frac{18+24\beta+12\beta^2+4\alpha+\alpha^2}{[n]_{q_n}+\beta}=0$,因此由(10)式可得

$$st\text{-}\lim_n \|D_{n,q_n}^{(\alpha,\beta)}(e_2;.)-e_2\|_{C[0,1]}=0. \tag{11}$$

结合(7),(9)和(11)式,由定理 2.1 可知所述的结论成立.

3 统计收敛速度

对$f\in C[0,1]$和$\delta>0$,f 的连续模定义为$\omega(f,\delta)=$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$\sup\limits_{0<h\le\delta}\sup\limits_{x,x+h\in[0,1]}|f(x+h)-f(x)|$.让 $f\in C[0,1]$,对任意的 $t,x\in[0,1]$和 $\delta>0$,我们有

$$|f(t)-f(x)|\le\omega(f,|t-x|)\le\begin{cases}\omega(f,\delta),|t-x|<\delta\\ \omega(f,\dfrac{(t-x)^2}{\delta}),|t-x|\ge\delta\end{cases}.$$

又因为对 $\lambda>0$,有 $\omega(f,\lambda\delta)\le(1+\lambda)\omega(f,\delta)$,所以对任意的 $t,x\in[0,1]$和 $\delta>0$,有

$$|f(t)-f(x)|\le(1+\delta^{-2}(t-x)^2)\omega(f,\delta), \qquad (12)$$

下面我们将借助于连续模,给出算子列$\{D_{n,q_n}^{(\alpha,\beta)}(f;x)\}$的统计收敛速度.

定理 3.1　让序列 $q=\{q_n\}$,$0<q_n<1$ 满足条件(6),则对任意 $f\in C[0,1]$,有 $\|D_{n,q_n}^{(\alpha,\beta)}(f;.)-f\|_{C[0,1]}\le2\omega(f,\delta_n)$,其中

$$\delta_n=\left\{\frac{12\beta^2+22\beta+\alpha^2+6\alpha+11}{[n]_{q_n}+\beta}(1+\frac{1}{[n]_{q_n}+\beta})\right\}^{1/2} \qquad (13)$$

证　利用算子 $D_{n,q}^{(\alpha,\beta)}(f;x)$的线性性和正性,由引理 1.4 及(3)和(12)式可得

$$\left|D_{n,q}^{(\alpha,\beta)}(f;x)-f(x)\right|\le D_{n,q}^{(\alpha,\beta)}(|f(t)-f(x)|;x)$$

$$\le(1+\delta^{-2}D_{n,q}^{(\alpha,\beta)}((t-x)^2;x))\omega(f,\delta)$$

$$\le\left[1+\delta^{-2}\frac{12\beta^2+22\beta+\alpha^2+6\alpha+11}{[n]_q+\beta}(1+\frac{1}{[n]_q+\beta})\right]\omega(f,\delta).$$

在上式中取 $q=q_n$,$0<q_n<1$ 满足条件(6),并且选择 δ 为(13)式给出的 δ_n,我们有 $\left|D_{n,q_n}^{(\alpha,\beta)}(f;x)-f(x)\right|\le2\omega(f,\delta_n)$,从而

$$\|D_{n,q_n}^{(\alpha,\beta)}(f;.)-f\|_{C[0,1]}\le2\omega(f,\delta_n).$$

下面我们将借助于 Lipschitz 函数类,给出算子列$\{D_{n,q_n}^{(\alpha,\beta)}(f;x)\}$的统计收敛速度.

定理 3.2　让 $q=\{q_n\}$,$0<q_n<1$ 满足条件(6).设 $f(x)\in Lip_M^{\sigma}$,其中 $0<\sigma\le1$,$M>0$,$x\in[0,1]$,则

$$\|D_{n,q_n}^{(\alpha,\beta)}(f;.)-f\|_{C[0,1]}\le M\delta_n^{\sigma},$$

其中 δ_n 由(13)式给出.

证　让 $f(x)\in Lip_M^{\sigma}$,其中 $0<\sigma\le1$,$M>0$,$x\in[0,1]$,则 $f\in C[0,1]$,且对任意的 $t,x\in[0,1]$,有 $|f(t)-f(x)|\le M|t-x|^{\sigma}$.这样,由算子 $D_{n,q}^{(\alpha,\beta)}(f;x)$的正性和线性性,可得

$$\left|D_{n,q}^{(\alpha,\beta)}(f;x)-f(x)\right|\le D_{n,q}^{(\alpha,\beta)}(|f(t)-f(x)|;x)$$

$$\le MD_{n,q}^{(\alpha,\beta)}(|t-x|^{\sigma};x).$$

因此,基于(3)式,由 Hölder 不等式,我们有

$$\left|D_{n,q}^{(\alpha,\beta)}(f;x)-f(x)\right|\le MD_{n,q}^{(\alpha,\beta)}(|t-x|^{\sigma};x)$$

$$\le M\left[D_{n,q}^{(\alpha,\beta)}((t-x)^2;x)\right]^{\sigma/2}.$$

在上式中取 $q=q_n$,$0<q_n<1$ 满足条件(6),从而由引理 1.4 知

$$\left|D_{n,q_n}^{(\alpha,\beta)}(f;x)-f(x)\right|\le M\left[D_{n,q_n}^{(\alpha,\beta)}((t-x)^2;x\right]^{\sigma/2}\le M\delta_n^{\sigma},$$

其中 δ_n 由(13)式给出.这蕴含着定理得证.

参考文献:

[1] Philips G M. Bernstein polynomials based on the q-integers. Ann. Numer. Math., 1997(4):511-518.

[2] Agratini O, Nowak G. On a generalization of Bleimann, Butzer and Hahn operators based on q -integers. Math. Comput. Model., 2011, 53 (5-6): 699-706.

[3] Dogru O, Orkcu M. Statistical approximation by a modification of q-Meyer- König-Zeller operators.Appl. Math. Lett., 2010, 23: 261-266.

[4] Gal S G. Voronovskaja's theorem, shape preserving properties and iterations for complex q-Bernstein polynomials. Studia Sci. Math. Hungary, 2011, 48 (1): 23-43.

[5] Yüksel I. Approximation by q -Phillips operators. Hacet. J. Math. Stat., 2011, 40(2): 191-201.

[6] Gupta V. Some approximation properties of q-Durrmeyer operators. Appl. Math. Comput., 2008(197):172-178.

[7] Kac V G, Cheung P. Quantum Calculus. New York: Springer Verlag, 2002.

[8] Gasper G, Rahman M. Basic Hypergeometric Series. Encyclopedia of Mathematics and its applications ,Vol.35. Cambridge: Cambridge University press, 1990.

[9] Niven I, Zuckerman H S, Montgomery H. An Introduction to the Theory of Numbers. New york:Wiley, 1991.

[10] Fast H. Sur la convergence statistique. Collog. Math.,1951(2): 241-244.

[11] Dogru O. On statistical approximation properties of Stancu type bivariate generalization of q-Balás-Szabados operators.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

in: Seminar on Numerical Analysis and Approximation Theory, Cluj Napoca, Univ. "Babes-Bolya", 2006:179-194.

[12] Gadjiev A D, Orhan C. Some approximation theorems via statistical convergence. Rocky Mountain J. Math. 2002(32): 129-138.

Statistical Approximation Properties of the q-Durrmeyer-Stancu Operators

REN Meiying

(School of Mathematics and Computer Science, Wuyi University, Wuyishan, Fujian 354300)

Abstract: In this paper, a kind of q-Durrmeyer-Stancu operators is introduced. Some statistical approximation properties of these operators are studied. The statistical approximation theorem of these operators is given. The estimates of the rate of statistical convergence for these operators are also investigated by means of modulus of continuity and the help of functions of the Lipschitz class.

Key words: Statistical approximation; q-Durrmeyer-Stancu operators; rate of convergence; modulus of continuity; q-integral

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn